Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA-1116)
1^{er} Examen Parcial (25 %)
Ene-Mar 2017
Tipo A

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (7 ptos.) Hallar el valor de la constante β para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - \beta z = 1 \\ \quad + \beta y - z = 2\beta - 5 \\ 4x + y - \beta z = \beta \end{cases}$$

(a) Tenga solución única.
(b) Tenga infinitas soluciones.
(c) No tenga solución.

2. (6 ptos.) Si $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 8$. Encuentre:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 - y_1 & 2x_2 - y_2 & 2x_3 - y_3 \\ 0 & 3z_1 & 3z_2 & 3z_3 \\ 0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

3. (6 ptos.) La matriz A tiene determinante positivo y su adjunta es:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Diga si A es invertible o no.
(b) Calcule el determinante de A.
(c) Calcule la matriz inversa de A.

4. (6 ptos.) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones:

(a) (2 pts.) Sea A una matriz cuadrada de orden n, tal que A es simétrica e invertible, entonces A^{-1} es simétrica.

(b) (2 pts.) Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n, con B invertible. $|A| = \frac{1}{4}$, $|C| = \frac{1}{3}$, $(C^2A^{-1}B^{-1})^tB^{-1} = I$. Entonces $|B|^2 = \frac{4}{9}$.

(c) (2 pts.) Demuestre que si y y z son soluciones del sistema $Ax = b$, entonces $w = \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{2-\sqrt{2}}{2}z$ es solución del sistema.

1. (7 ptos.) Hallar el valor de la constante β para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - \beta z = 1 \\ \quad + \beta y - z = 2\beta - 5 \\ 4x + y - \beta z = \beta \end{cases}$$

(a) Tenga solución única.

(b) Tenga infinitas soluciones.

(c) No tenga solución.

SOLUCIÓN Escribimos el sistema de ecuaciones de forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\beta \\ 0 & \beta & -1 \\ 4 & 1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\beta - 5 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Escribimos la matriz aumentada del sistema y aplicamos el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & \beta & -1 & 2\beta - 5 \\ 4 & 1 & -\beta & \beta \end{array}\right) \sim . \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & 3 & -3\beta & \beta - 4 \\ 0 & 0 & \beta^2 - 1 & \frac{1}{3}(\beta^2 + 2\beta - 15) \end{array}\right) \tag{1}$$

- Para $\beta^2 - 1 = 0 \Rightarrow \beta = \pm 1$, nos queda en la fila 3

$$0x + 0y + 0z = \frac{1}{3}(\beta + 5)(\beta - 3)$$

De donde, como $\beta + 5 \neq 0$ y $\beta - 3 \neq 0$ si $\beta = \pm 1$, tenemos una incongruencia. Por lo tanto, para $\beta = \pm 1$, el sistema no tiene solución.

- Para $\beta^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow \beta \neq \pm 1$, dividimos la fila 3 por $(\beta^2 - 1)$ en (1);

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & 3 & -3\beta & \beta - 4 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\beta^2 + 2\beta - 15}{3(\beta^2 - 1)} \end{array}\right)$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan, tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & 3 & -3\beta & \beta - 4 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\beta^2 + 2\beta - 15}{3(\beta^2 - 1)} \end{array}\right) \sim . \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (\beta - 1) \div (3) \\ 0 & 1 & 0 & (6\beta^2 - 14\beta - 4) \div (3(\beta^2 - 1)) \\ 0 & 0 & 1 & (\beta^2 + 2\beta - 15) \div (3(\beta^2 - 1)) \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema tiene solución única para $\beta \neq \pm 1$, la cual viene dada por:

$$\vec{x} = (x, y, z) = \frac{1}{3}\left(\beta - 1, \frac{6\beta^2 - 14\beta - 4}{\beta^2 - 1}, \frac{\beta^2 + 2\beta - 15}{\beta^2 - 1}\right)$$

Finalmente,

(a) El sistema tiene solución única si $\beta \neq \pm 1$.

(b) No existen valores de β para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.

(c) El sistema no tiene solución si $\beta = \pm 1$.

2. (6 ptos.) Si $\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 8$. Encuentre:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 - y_1 & 2x_2 - y_2 & 2x_3 - y_3 \\ 0 & 3z_1 & 3z_2 & 3z_3 \\ 0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN Expandemos por cofactores la fila 1:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 - y_1 & 2x_2 - y_2 & 2x_3 - y_3 \\ 0 & 3z_1 & 3z_2 & 3z_3 \\ 0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = (1)\det\begin{pmatrix} 2x_1 - y_1 & 2x_2 - y_2 & 2x_3 - y_3 \\ 3z_1 & 3z_2 & 3z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} + 0 + 0 + 0$$

Ahora aplicamos propiedades del determinante y operaciones elementales por fila hasta llegar a:

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 2x_1 - y_1 & 2x_2 - y_2 & 2x_3 - y_3 \\ 3z_1 & 3z_2 & 3z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)\det(.)]{\substack{F_2 \longleftrightarrow F_3 \\ F_1 \to F_1 + F_3}} \det\begin{pmatrix} (2)x_1 & (2)x_2 & (2)x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (3)z_1 & (3)z_2 & (3)z_3 \end{pmatrix}$$

$$= (2)(3)(-1)\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = (-6)(8) = -48$$

Finalmente, $$\boxed{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 - y_1 & 2x_2 - y_2 & 2x_3 - y_3 \\ 0 & 3z_1 & 3z_2 & 3z_3 \\ 0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = -48}$$

3. (6 ptos.) La matriz A tiene determinante positivo y su adjunta es:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Diga si A es invertible o no.

(b) Calcule el determinante de A.

(c) Calcule la matriz inversa de A.

SOLUCIÓN

(a) El enunciado nos dice que $\det(A) > 0$, por lo tanto la matriz A es invertible, ya que $\det(A) \neq 0$

(b) Sabiendo que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$, encontremos una relación entre $|A|$ y la $\text{Adj}(A)$:

$$\Rightarrow |A^{-1}| = \left|\frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)\right| \Rightarrow \frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3}|\text{Adj}(A)| \Rightarrow |A|^2 = |\text{Adj}(A)| \Rightarrow |A| = \sqrt{|\text{Adj}(A)|}$$

Ahora calculamos $|\text{Adj}(A)|$ expandiendo cofactores sobre la fila 1:

$$\begin{vmatrix} 14 & -4 & 12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + (-1)(-4)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 14(50) + 4(25) + 12(25) = 1100$$

$$\text{Luego, } \boxed{|A| = \sqrt{1100}}$$

(c) Ya teniendo $|A|$ y $\text{Adj}(A)$, solo queda sustituir en $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$. Así:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1100}}\begin{pmatrix} 14 & -4 & 12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}}$$

4. (6 ptos.) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones:

   (a) (2 pts.) Sea A una matriz cuadrada de orden n, tal que A es simétrica e invertible, entonces A^{-1} es simétrica.

   (b) (2 pts.) Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n, con B invertible. $|A| = \dfrac{1}{4}$, $|C| = \dfrac{1}{3}$, $(C^2A^{-1}B^{-1})^tB^{-1} = I$. Entonces $|B|^2 = \dfrac{4}{9}$.

   (c) (2 pts.) Demuestre que si y y z son soluciones del sistema $Ax = b$, entonces $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}z$ es solución del sistema.

SOLUCIÓN

(a) Sabiendo que una matriz simétrica cumple que: $M = M^t$, y teniendo en cuenta las propiedades de las matrices transpuestas: $(BC)^t = C^tB^t$, $(B^t)^t = B$ y $I^t = I$:

$$A = A^t \Rightarrow A^{-1}A = A^{-1}A^t \Rightarrow I = A^{-1}A^t \Rightarrow I^t = (A^{-1}A^t)^t \Rightarrow I = (A^t)^t(A^{-1})^t$$

$$\Rightarrow I = A(A^{-1})^t \Rightarrow A^{-1}I = A^{-1}A(A^{-1})^t \Rightarrow A^{-1} = (A^{-1})^t$$

Por lo tanto la afirmación es **VERDADERA**.

(b) Sabiendo que $|M| = |M^t|$, $|M| \cdot |M^{-1}| = 1$, $|PQ| = |P| \cdot |Q|$ y $|I| = 1$. Entonces:

$$|(C^2A^{-1}B^{-1})^tB^{-1}| = |I| \Rightarrow |(CCA^{-1}B^{-1})^tB^{-1}| = |I| \Rightarrow |(CCA^{-1}B^{-1})^t| \cdot |B^{-1}| = |I|$$

$$\Rightarrow |(CCA^{-1}B^{-1})| \cdot |B^{-1}| = |I| \Rightarrow |C| \cdot |C| \cdot |A^{-1}| \cdot |B^{-1}| \cdot |B^{-1}| = |I| \Rightarrow |C|^2 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|B|} = |I|$$

$$\Rightarrow |C|^2 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|B|^2} = |I| \Rightarrow |C|^2 \cdot \frac{1}{|A|} = |I| \cdot |B|^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \cdot |B|^2 \Rightarrow |B|^2 = \frac{4}{9}$$

Por lo tanto la afirmación es **VERDADERA**.

(c) Si $\vec{w}$ es solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, se debe cumplir que: $A\vec{w} = \vec{b}$, entonces:

$$A\vec{w} = A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{y} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\vec{z}\right) = A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{y} + \frac{2}{2}\vec{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{z}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}A\vec{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}A\vec{z} + A\vec{z}$$

Como $\vec{y}$ y $\vec{z}$ son soluciones al sistema, entonces $A\vec{y} = \vec{b}$ y $A\vec{z} = \vec{b}$, así:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}A\vec{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}A\vec{z} + A\vec{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b} + \vec{b} = \vec{b}, \text{ es decir: } A\vec{w} = \vec{b}$$

Por lo tanto la afirmación es **VERDADERA**.

Este examen fue digitalizado por **Alvaro Quintana**, **Jesús Gutiérrez** y **Daniel Medina**

gecousb.com.ve

Cualquier error, notificar a **gecousb@gmail.com**